

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ CLUJ - 20.02.2026**

Barem clasa a VII-a

Din oficiu.....10p

Subiectul 1. (25 puncte)

Se consideră numărul real $a = 2027 - \frac{1+2+3+\dots+2025}{\sqrt{1+3+5+\dots+2025}}$.

a) Arătați că a este număr natural.

b) Calculați $S = a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^{2027}$.

c) Arătați că suma $S = a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^{2027}$ este divizibilă cu 5.

Soluție:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 2025 = 2025 \cdot 2026 : 2 = 2025 \cdot 1013$4p

$\sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 2025} = \sqrt{1013^2} = 1013$ 4p

$a = 2027 - \frac{2025 \cdot 1013}{1013} = 2027 - 2025 = 2$ 2p

b) $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2027} = 2^{2028} - 1$8p

c) $U(S) = U(2^{2028} - 1) = U(6 - 1) = 5 \Rightarrow S : 5$7p

Subiectul 2. (25 puncte)

Se consideră numerele reale: $a = \frac{\sqrt{(4-\sqrt{7})^2} + \sqrt{(6-3\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2\sqrt{7}-8)^2}}{\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2}}$ și $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{600}$. Să se arate

că rădăcina pătrată a numărului $a + 25b$ este un număr natural.

Soluție:

$a = \frac{|4-\sqrt{7}| + |6-3\sqrt{7}| + |2\sqrt{7}-8|}{|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}| \cdot |2\sqrt{3}+3\sqrt{2}|}$3p

$a = \frac{4-\sqrt{7}-6+3\sqrt{7}-2\sqrt{7}+8}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}$3p

$a = \frac{6}{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}$2p

$a = 1$2p

$b = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{24 \cdot 25}$3p

$b = \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{25-24}{24 \cdot 25}$3p

$b = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{24} - \frac{1}{25}$2p

$b = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$2p

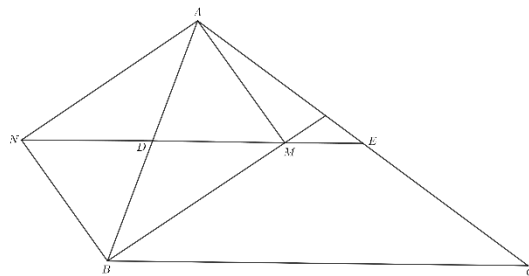
$\sqrt{a + 25b} = \sqrt{1 + 25 \cdot \frac{24}{25}}$3p

$\sqrt{a + 25b} = \sqrt{25} = 5$ este număr natural.....2p

Subiectul 3. (20 puncte)

Fie D mijlocul laturii AB a triunghiului ABC . Paralela prin D la BC intersectează latura AC în punctul E și bisectoarea unghiului ABC în punctul M , iar punctul N este simetricul lui M față de D .

- Desenați figura corespunzătoare.
- Aflați măsura unghiului AMB .
- Arătați că $AMBN$ este dreptunghi.



Soluție:

a) desen3p

b) D mijlocul lui $AB \Rightarrow AD \equiv DB$ 2p

$\left. \begin{array}{l} DE \parallel BC \\ M \in DE \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} DM \parallel BC \\ BM \text{ secantă} \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle DMB \text{ (alterne interne) (2) } \dots\dots\dots 2p$

BM bisectoarea $\sphericalangle DBC \Rightarrow \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle DBM$ (3)..2p

Din (2) și (3) $\Rightarrow \sphericalangle DMB \equiv \sphericalangle DBM \Rightarrow \triangle DBM$ este isoscel $\Rightarrow DM \equiv DB$ 3p

În $\triangle AMB$: MD mediană, $MD \equiv DB$ și $DB = \frac{AB}{2} \Rightarrow DM = \frac{AB}{2} \xrightarrow{\text{r.t.med.}} \sphericalangle AMB = 90^\circ$ 3p

c) În $AMBN$: AB, NM diagonale

$\left. \begin{array}{l} D \text{ mijlocul lui } AB \Rightarrow AD \equiv DB \\ N \text{ este simetricul lui } M \text{ față de } D \Rightarrow ND \equiv DM \end{array} \right\} \Rightarrow AMBN \text{ paralelogram} \dots\dots\dots 3p$

$AMBN$ paralelogram și $\sphericalangle AMB = 90^\circ \Rightarrow AMBN$ dreptunghi2p

Subiectul 4. (20 puncte)

Arătați că numărul N este natural și $2\sqrt{2026} > N$, unde

$$N = \sqrt{4052 + 2\sqrt{2025 \cdot 2027}} - \sqrt{4052 - 2\sqrt{2025 \cdot 2027}}.$$

Soluție:

$$2025 \cdot 2027 = (2026 - 1)(2026 + 1) = 2026^2 - 1 \dots\dots\dots 5p$$

$$N^2 = 4052 + 2\sqrt{2025 \cdot 2027} - 2\sqrt{(4052 + 2\sqrt{2025 \cdot 2027})(4052 - 2\sqrt{2025 \cdot 2027})} + 4052 - 2\sqrt{2025 \cdot 2027} \dots\dots\dots 5p$$

$$N^2 = 2 \cdot 4052 - 2\sqrt{4052^2 - 4 \cdot 2026^2 + 4} = 8104 - 4 = 8100 \dots\dots\dots 4p$$

$$N = 90 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 3p$$

$$2\sqrt{2026} > 90 \Leftrightarrow 4 \cdot 2026 > 8100 \Leftrightarrow 8104 > 8100 \text{ "Adev"} \dots\dots\dots 3p$$